26 октября
Классная работа

Тема: Производная сложной функции.

Теорема:

Пусть сложная функция $y = f(x) = \varphi(g(x))$ такова, что функция $y = \varphi(u)$ определена на промежутке *U*, а функция $u = g(x)$ определена на промежутке *X* и множество всех ее значений входит в промежуток *U*. Пусть функция $u = g(x)$ имеет производную в каждой точке внутри промежутка *X,* а функция $y = \varphi(u)$ имеет производную в каждой точке внутри промежутка *U*. Тогда функция $y = f(x)$ имеет производную в каждой точке внутри промежутка *X*, вычисляемую по формуле $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.

Более развернуто можно записать так: $y'(x) = y'(u) \cdot g'(x)$, где $u = g(x)$.

Доказательство

В точке $x \in X$ зададим приращение аргумента $\Delta x \neq 0$, $(x + \Delta x) \in X$. Тогда функция $u = g(x)$ получит приращение Δu, а функция $y = \varphi(u)$ получит приращение Δy. Надо учесть, что так как функция $u = g(x)$ в точке *x* имеет производную, то она непрерывна в этой точке и $\Delta u \to 0$ при $\Delta x \to 0$. При условии, что $\Delta u \neq 0$, имеем $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \dfrac{\Delta u}{\Delta x}$.

Перейдя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим $y'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\left(\dfrac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \dfrac{\Delta u}{\Delta x}\right) = \lim\limits_{\Delta u \to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x} = y'(u) \cdot g'(x).$

Пример 1:

Найти производную функции $y = e^{2x}$.

Разобьем сложную функцию на простые: $y = e^u, u = 2x$. Тогда $y' = \left(e^u\right)' \cdot \left(2x\right)' = e^u \cdot 2 = 2e^u$. Теперь вместо функции *u* подставляем её значение ($u = 2x$) и получаем: $y' = 2e^{2x}$.

Пример 2:

Найти производную функции $y = \sin(2x - 3)$.

Разобьем сложную функцию на простые: $y = \sin u, u = 2x - 3$. Тогда $y' = (\sin u)' \cdot (2x - 3)' = \cos u \times$ $\times 2 = 2\cos u$. Теперь вместо функции *u* подставляем её значение ($u = 2x - 3$) и получаем: $y' = 2\cos(2x - 3)$.