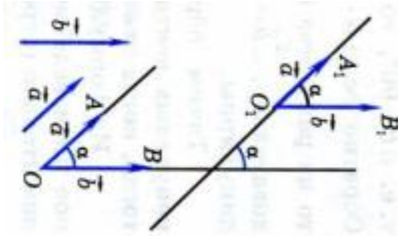
13 января

Классная работа

Тема: Скалярное произведение векторов. Применение скалярного произведения к решению задач.

1) Угол между векторами



Пусть a и b – два данных вектора. Отложим от произвольной точки O векторы OA = a и OB = b. Если векторы a и b не являются сонаправленными, то лучи OA и OB образуют угол AOB (см. рис.). Градусную меру этого угла обозначим буквой α и будем говорить, что угол между векторами a и b равен α.

$$\alpha = \vec{a} \ \hat{} \ \vec{b}$$

Два вектора называются ***__перпендикулярными__***, если угол между ними равен 90°.

2) Скалярное произведение векторов

__Скалярным произведением__ двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\left(\vec{a} \ \hat{} \ \vec{b}\right)$$

Если a ≠ 0 и b ≠ 0, то

а) $\left(0° < \vec{a} \ \hat{} \ \vec{b} < 90°\right) \Leftrightarrow \left(\vec{a} \cdot \vec{b} > 0\right)$; б) $\left(90° < \vec{a} \ \hat{} \ \vec{b} < 180°\right) \Leftrightarrow \left(\vec{a} \cdot \vec{b} < 0\right)$;

в) $\left(\vec{a} \ \hat{} \ \vec{b} = 90°\right) \Leftrightarrow \left(\vec{a} \cdot \vec{b} = 0\right)$; г) $\left(\vec{a} \ \hat{} \ \vec{b} = 0°\right) \Leftrightarrow \left(\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|\right)$.

3) Скалярное произведение векторов в координатах

В прямоугольной системе координат скалярное произведение векторов $\vec{a}$ $\{x_1;\ y_1\}$ и $\vec{b}$ $\{x_2;\ y_2\}$ выражается формулой $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$.

__Следствие 1__

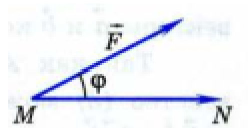
Ненулевые векторы $a\{x_1;\ y_1\}$ и $b\{x_2; y_2\}$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда $x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 = 0$.

__Следствие 2__

Косинус угла a между ненулевыми векторами a $\{x_1;\ y_1\}$ и b $\{x_2;\ y_2\}$ выражается формулой

$$\cos\alpha = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}.$$

4) Применение скалярного произведения

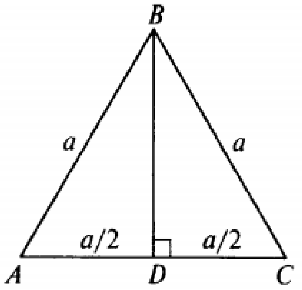


Скалярное произведение векторов широко используется в физике. Например, из курса механики известно, что работа A постоянной силы F при перемещении тела из точки M в точку N (см. рис.) равна произведению длин векторов силы F и перемещения MN на косинус угла между ними:

A = | F | • | MN | • cos φ.

Правая часть этого равенства представляет собой скалярное произведение векторов F и MN, т. е. работа A силы F равна скалярному произведению векторов силы и перемещения: A = F • MN.

Задача № 1042



Решение: В равностороннем треугольнике все углы равны 60°

а) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right| \cdot \cos\angle BAC = a \cdot a \cdot \cos 60° = \dfrac{a^2}{2}$;

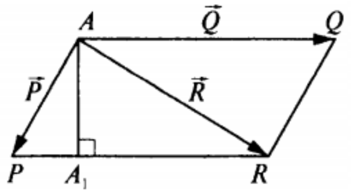
б) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = \left|\overrightarrow{AC}\right| \cdot \left|\overrightarrow{CB}\right| \cdot \cos 120° = a^2 \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{a^2}{2}$;

в) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$, так как $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$;

г) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = \left|\overrightarrow{AC}\right|^2 = a^2$.

Ответ: а) $\dfrac{a^2}{2}$; б) $-\dfrac{a^2}{2}$; в) 0; г) a^2.

Задача № 1043



Дано: $\left|\vec{P}\right| = 8$, $\left|\vec{Q}\right| = 15$, $\angle A = 120°$.

Найти: $\left|\vec{R}\right|$.

Решение: В ΔPAA_1 $\angle A_1 = 90°$, $\angle A = 30°$, $PA_1 = \dfrac{1}{2}AP = \dfrac{1}{2} \cdot 8 = 4$.

По теореме Пифагора $AA_1 = \sqrt{AP^2 - PA_1^{\,2}}$.

Из Δ RAA_1 по теореме Пифагора $AA_1 = \sqrt{AR^2 - A_1R^2}$, следовательно, $\sqrt{AP^2 - PA_1^{\,2}} = \sqrt{AR^2 - A_1R^2}$.

$8^2 - 4^2 = AR^2 - 11^2$; $AR^2 = 8^2 + 11^2 - 4^2 = 169 \Rightarrow AR = 13$.

Следовательно, $\left|\vec{R}\right| = 13$.

Ответ: $\left|\vec{R}\right| = 13$.

Задача № 1044 (а, в)

а) $\vec{a}\left\{\dfrac{1}{4}; -1\right\}$, $\vec{b}\{2; 3\} \Rightarrow$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = \dfrac{1}{4} \cdot 2 + (-1) \cdot 3 = \dfrac{1}{2} - 3 = -2{,}5$;

в) $\vec{a}\{1{,}5; 2\}$, $\vec{b}\{4; -0{,}5\} \Rightarrow$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1{,}5 \cdot 4 + 2 \cdot (-0{,}5) = 6 - 1 = 5$.

Ответ: а) $-2{,}5$; в) 5.

Задача № 1051

Решение:

Если $\vec{a}\{x_1; y_1\}$, $\vec{b}\{x_2; y_2\}$, то $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^{\,2} + y_1^{\,2}} \cdot \sqrt{x_2^{\,2} + y_2^{\,2}}}$.

1) $\overrightarrow{AB}\{-1 - 2;\ 5 - 8\} = \overrightarrow{AB}\{-3;\ -3\}$; $\overrightarrow{AC}\{3 - 2;\ 1 - 8\} = \overrightarrow{AC}\{1;\ -7\}$;

$$\cos A = \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{-3 \cdot 1 + (-3) \cdot (-7)}{\sqrt{(-3)^2 + (-3)^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-7)^2}} = \frac{3}{5}.$$

2) $\overrightarrow{BA}\{3;\ 3\}$; $\overrightarrow{BC}\{3 + 1;\ 1 - 5\} = \overrightarrow{BC}\{4;\ -4\}$;

$$\cos B = \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \frac{3 \cdot 4 + 3 \cdot (-4)}{\sqrt{3^2 + 3^2} \cdot \sqrt{4^2 + (-4)^2}} = 0.$$

3) $\overrightarrow{CA}\{-1;\ 7\}$, $\overrightarrow{CB}\{-4;\ 4\}$;

$$\cos C = \cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \frac{-1 \cdot (-4) + 7 \cdot 4}{\sqrt{(-1)^2 + 7^2} \cdot \sqrt{(-4)^2 + 4^2}} = \frac{4 + 28}{5\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2}} = \frac{4}{5}.$$

Ответ: $\cos A = \dfrac{3}{5}$; $\cos B = 0$; $\cos C = \dfrac{4}{5}$.