01 марта

Классная работа

Тема: Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия.

Если |q| < 1, то прогрессия называется ***бесконечно убывающей геометрической прогрессией***.

Вычислить сумму бесконечного числа членов такой прогрессии можно по формуле $S = \frac{b_1}{q-1}$.

Пример 1

Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 4, а сумма кубов ее членов равна 192. Найти эту прогрессию.

Пусть дана прогрессия $b_1, b_1 \cdot q, b_1 \cdot q^2, ..., b_1 \cdot q^{n-1}, |q| < 1.$ Тогда ее сумма $S = \frac{b_1}{1-q}$.

Кубы членов данной прогрессии: $b_1^{\ 3}, b_1^{\ 3} \cdot q^3, b_1^{\ 3} \cdot q^6, ...$ также образуют геометрическую прогрессию с первым членом $b_1^{\ 3}$ и знаменателем q^3. Так как при $|q| < 1$ величина $|q^3| < |q|^3 < 1$, то эта прогрессия также бесконечно убывающая и ее сумма равна 192.

Получаем систему нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} 4 = \frac{b_1}{1-q}, \\ 192 = \frac{b_1^3}{1-q^3}. \end{cases}$$

Для решения этой системы возведем первое уравнение в куб: $64 = \frac{b_1^{\ 3}}{(1-q)^3}$ и разделим второе уравнение системы на полученное уравнение: $3 = \frac{b_1^{\ 3}}{1-q^3} \cdot \frac{(1-q)^3}{b_1^{\ 3}} = \frac{(1-q)^2}{q^2+q+1}$ или $2q^2 + 5q + 2 = 0$. Корни этого уравнения q = -0,5; q = -2 (не подходит, т. к. прогрессия бесконечно убывающая и $|q| < 1$). Теперь из первого уравнения находим $b_1 = 4 \cdot (1 -(-0,5)) = 4 \cdot 1,5 = 6$.

Понятие бесконечно убывающей геометрической прогрессии позволяет обращать десятичные бесконечные периодические дроби в обыкновенные.

Пример 2

Обратить десятичную дробь 0,(17) в обыкновенную.

Запишем дробь в виде 0,(17) = 0,171717... = $\frac{17}{100} + \frac{17}{10000} + ...$ Таким образом, число 0,(17) является суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии, у которой $b_1 = \frac{17}{100}$ и $q = \frac{1}{100}$.

Эта сумма равна: $S = \left(\frac{17}{100}\right) : \left(1 - \frac{1}{100}\right) = \frac{17}{100} \cdot \frac{100}{99} = \frac{17}{99}$.

Итак. 0,(17) = $\frac{17}{99}$.