

11 февраля
Классная работа

Тема: Определение арифметической прогрессии. Формула n-го члена арифметической прогрессии.

1. Арифметическая последовательность

Последовательность чисел a_n , каждый член которой (начиная со второго) равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом d (разностью прогрессии), называется арифметической прогрессией: $a_{n+1} = a_n + d$ ($n \geq 1$). При $d > 0$ арифметическая прогрессия возрастает, при $d < 0$ - убывает.

Пример 1

Найти первые пять членов арифметической прогрессии, если $a_1 = 5$, $d = 2$.

Из определения арифметической прогрессии $a_{n+1} = a_n + d$ получаем:

при $n = 1$ $a_2 = a_1 + d = 5 + 2 = 7$,

при $n = 2$ $a_3 = 7 + 2 = 9$,

при $n = 3$ $a_4 = 9 + 2 = 11$,

при $n = 4$ $a_5 = 11 + 2 = 13$.

Итак, эти члены: 5, 7, 9, 11, 13.

2. Формула n-го члена

В определении арифметической прогрессии использована рекуррентная формула $a_{n+1} = a_n + d$. Получим формулу n-го члена:

$$\left. \begin{array}{l} a_2 = a_1 + d \\ a_3 = a_2 + d \\ a_4 = a_3 + d \\ \dots \\ a_{n-1} = a_{n-2} + d \\ a_n = a_{n-1} + d \end{array} \right\} (n-1) \text{ членов}$$

Сложим эти равенства, тогда в левой и правой части сокращаются одинаковые члены a_2, a_3, \dots, a_{n-1} и получаем $a_n = a_1 + d \cdot (n-1)$ - получена важнейшая формула - формула n-го члена арифметической прогрессии.

Пример 2

В арифметической прогрессии сумма второго и пятого членов равна 8, а третьего и седьмого равна 14. Найти прогрессию.

Выразим все члены прогрессии через ее первый член и разность: $a_2 = a_1 + d$, $a_5 = a_1 + 4d$, $a_3 = a_1 + 2d$, $a_7 = a_1 + 6d$ и запишем условия задачи: $8 = a_2 + a_5 = (a_1 + d) + (a_1 + 4d) = 2a_1 + 5d$, $14 = a_3 + a_7 = 2a_1 + 8d$.

Для получения a_1 и d решим систему линейных уравнений
$$\begin{cases} 2a_1 + 5d = 8, \\ 2a_1 + 8d = 14. \end{cases}$$

Вычитая из второго уравнения первое получим $3d = 6$, откуда $d = 2$, $a_1 = -1$.

3. Свойства арифметической прогрессии

Теперь рассмотрим два основных свойства:

- каждый член арифметической прогрессии, начиная со второго, равен среднему арифметическому предыдущего и последующего членов:
- если в последовательности (a_n) каждый член, начиная со второго, равен среднему арифметическому предыдущего и последующего членов, то эта последовательность является арифметической прогрессией.

$$a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n \Rightarrow 2a_n = a_{n-1} + a_{n+1} \Rightarrow a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$