8 февраля
Классная работа

Тема: Последовательности.

Множество чисел, для каждого из которых известен его порядковый номер, называют ***последовательностью***.

Числа, образующие последовательность, называют ***членами последовательности***. Члены последовательности обычно обозначают буквами с индексами, указывающими порядковый номер члена: a_1 a_2, a_3, a_n, ... Соответственно, член последовательности с номером n (или n-й член последовательности) обозначают a_n, а саму последовательность - (a_n).

Пример 1

Рассмотрим последовательность натуральных трехзначных чисел: 100; 101; 102;...; 999. В ней: $a_1 = 100$, $a_2 = 101$, $a_3 = 102$, $a_{900} = 999$. Член этой последовательности с номером n (n-й член последовательности) можно вычислить по формуле $a_n = 99 + n$, где n = 1, 2, 3, ..., 900.

Последовательность может содержать бесконечно много членов (например, последовательность натуральных чисел). Такую последовательность называют ***бесконечной***. Последовательность может содержать и конечное число членов (пример 1). Такую последовательность называют ***конечной***.

Способы задания последовательности

Последовательность необходимо задать, т. е. указать способ, с помощью которого можно найти каждый ее член. Рассмотрим основные способы задания последовательностей.

1. Аналитический способ (формула n-го члена)

Последовательность задается формулой, которая позволяет найти по номеру n ее член a_n.

Пример 2

Пусть последовательность задана формулой $a_n = 3n – 2$. Подставляя вместо n натуральные числа, находим члены последовательности: $a_1 = 3*1 – 2 = 1$, $a_2 = 3*2 – 2 = 4$, $a_3 = 3*3 – 2 = 7$и т. д. Имеем последовательность: 1, 4, 7,... .

2. Аналитический способ (рекуррентная формула)

Последовательность задается формулой, которая позволяет найти следующие члены последовательности, если известны один или несколько предыдущих членов.

Пример 3

Пусть последовательность задана формулой $a_{n+1} = 2a_n + 3$, где $a_1 = 5$ и $n \geq 1$. Запишем рекуррентную формулу для n = 1: $a_{1+1} = 2a_1 + 3$, или $a_2 = 2*5 + 3 = 13$.

Пишем формулу для n = 2: $a_{2+1} = 2a_2 + 3$, или $a_3 = 2 \cdot 13 + 3 = 29$.

Запишем формулу для n = 3: $a_{3+1} = 2a_3 + 3$, или $a_4 = 2 \cdot 29 + 3 = 61$ и т. д.

Имеем последовательность: 5, 13, 29, 61, ...

3. Описательный способ

Описывается способ получения членов последовательности.

Пример 4

Рассмотрим последовательность натуральных четных чисел. Из описания последовательности легко выписать ее члены: 2, 4, 6, 8,...

Свойства последовательностей

1. Ограниченность последовательности

Последовательность (a_n) называют ***ограниченной***, если существуют два таких числа a и A, что для любого натурального номера n выполнено неравенство: $a < a_n < A$.

Пример 5

Докажем ограниченность последовательности $a_n = \frac{n-1}{n+2}$.

Найдем первый член последовательности $a_1 = \frac{1-1}{2+2} = 0$ и член последовательности с очень большим номером n, например 100: $a_{100} = \frac{100-1}{100+2} = \frac{99}{102} \approx 1$.

Возникает гипотеза, что последовательность ограничена и a = 0, и A = 1. Поэтому надо доказать, что при всех натуральных значениях n выполнено неравенство $0 \le \frac{n-1}{n+2} \le 1$.

Очевидно, что левая часть неравенства выполняется. Рассмотрим правую часть неравенства. Так как выражение n + 2 положительно, то получаем неравенство $n - 1 \le n + 2$, или $-1 \le 2$, которое является верным.

2. Монотонность последовательности

Последовательность (a_n) называют ***возрастающей***, если каждый ее член (начиная со второго) больше предыдущего, т. е. $a_{n+1} > a_n$ для $n \ge 1$.

Последовательность (a_n) называют ***убывающей***, если каждый ее член (начиная со второго) меньше предыдущего, т. е. $a_{n+1} < a_n$ для $n \ge 1$.

Пример 6

Определим монотонность последовательности $a_n = \frac{n-1}{n+2}$.

Запишем (n + 1)-й член последовательности $a_{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1+2} = \frac{n}{n+3}$.

Найдем разность двух соседних членов: $a_{n+1} - a_n = \frac{n-1}{n+2} - \frac{n}{n+3} = \frac{(n-1)(n+3) - n(n+2)}{(n+2)(n+3)} =$

$= \frac{3}{(n+2)(n+3)}$.

Так как n – натуральное число, то при всех n дробь $\frac{3}{(n+2)(n+3)}$ положительна. Поэтому $a_{n+1} - a_n > 0$, или $a_{n+1} > a_n$, при всех n. Тогда по определению данная последовательность (a_n) возрастающая.