

Тема: Равносильность уравнений и неравенств системам. Основные понятия.

Пусть дано несколько уравнений и несколько неравенств с неизвестным x и пусть требуется найти все числа x , каждое из которых удовлетворяет каждому из этих уравнений и неравенств. Тогда говорят, что дана система уравнений и неравенств, или, коротко, дана система.

Число x_0 называют решением системы, если это число удовлетворяет каждому из уравнений, неравенств и другим условиям системы.

Решить систему – значит найти все ее решения или показать, что их нет.

Говорят, что уравнение (неравенство) равносильно системе, если каждое решение уравнения (неравенства) является решением системы, а каждое решение системы является решением уравнения (неравенства).

Говорят, что уравнение (неравенство) равносильно совокупности нескольких систем, если любое решение уравнения (неравенства) является решением совокупности систем, а любое решение совокупности систем является решением уравнения (неравенства), т. е. если совпадают множества решений уравнения (неравенства) и совокупности систем.

ПРИМЕР 1. Уравнение $|x + 1| = 2x - 3$ равносильно совокупности систем

$$\begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ x + 1 = 2x - 3 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x + 1 < 0 \\ -x - 1 = 2x - 3. \end{cases}$$

$$|x + 1| = 2x - 3 \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ -x = -4 \end{cases} \\ \begin{cases} x + 1 < 0 \\ -3x = -2 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x \geq -1 \\ x = 4 \end{cases} \\ \begin{cases} x < -1 \\ x = \frac{2}{3} \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x \notin R \end{cases} \Rightarrow x = 4.$$

ПРИМЕР 2. Неравенство $(x - 1)(x - 2) > 0$ равносильно совокупности систем

$$\begin{cases} x - 1 > 0 \\ x - 2 > 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x - 1 < 0 \\ x - 2 < 0. \end{cases}$$

$$(x - 1)(x - 2) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x - 1 > 0 \\ x - 2 > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x - 1 < 0 \\ x - 2 < 0 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x > 1 \\ x > 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 1 \\ x < 2 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (2; +\infty) \\ x \in (-\infty; 1) \end{cases} \Rightarrow x \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty).$$

Выполнить №№, 9.5 (а), 9.6 (б), 9.7 (решить).

№ 9.5 (а)

$$|x| = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ -x = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -5 \end{cases}$$

№ 9.6 (б)

$$|x| > 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 \\ -x > 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 4 \\ x < -4 \end{cases}$$

№ 9.7

$$|x + 2| = 2x + 3 \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x + 2 \geq 0 \\ x + 2 = 2x + 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x + 2 < 0 \\ -x - 2 = 2x + 3 \end{cases} \end{cases} \text{ (верно)} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x \geq -2 \\ -x = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x < -2 \\ -3x = 5 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x \geq -2 \\ x = -1 \end{cases} \\ \begin{cases} x < -2 \\ x = -1\frac{2}{3} \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x \notin R \end{cases} \Rightarrow x = -1.$$